Leçon 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Développements :

Suites récurrentes : convergence lente, Théorèmes d'Abel et taubérien faible.

Bibliographie :

El Amrani, Gourdon, Combes, Ouvrard, Bernis.

Rapport du jury 2018 :

De nombreux candidats commencent leur plan par une longue exposition des conditions classiques assurant la convergence ou la divergence des séries numériques. Sans être hors sujet, cette exposition ne doit pas former l'essentiel de la matière de la leçon. Un thème important de la leçon est en effet le comportement asymptotique des restes et sommes partielles (équivalents, développements asymptotiques — par exemple pour certaines suites récurrentes — cas des séries de Riemann, comparaison séries et intégrales,...). Le manque d'exemples est à déplorer. On peut aussi s'intéresser à certaines sommes particulières, que ce soit pour exhiber des nombres irrationnels (voire transcendants), ou mettre en valeur des techniques de calculs non triviales (par exemple en faisant appel aux séries de Fourier ou aux séries entières). Enfin le jury apprécie que le théorème des séries alternées (avec sa version sur le contrôle du reste) soit maîtrisé, mais il rappelle aussi que la transformation d'Abel trouve toute sa place dans cette leçon.

Rapport du jury 2017 :

De nombreux candidats commencent leur plan par une longue exposition des conditions classiques assurant la convergence ou la divergence des séries numériques. Sans être hors sujet, cette exposition ne doit pas former l'essentiel de la matière de la leçon. Le thème central de la leçon est en effet le comportement asymptotique des restes et sommes partielles (équivalents, développements asymptotiques — par exemple pour certaines suites récurrentes — cas des séries de Riemann, . . .). On peut aussi s'intéresser à certaines sommes particulières, que ce soit pour exhiber des nombres irrationnels (voire transcendants), ou mettre en valeur des techniques de calculs non triviales (par exemple en faisant appel aux séries de Fourier ou aux séries entières). Enfin le jury apprécie que le théorème des séries alternées (avec sa version sur le contrôle du reste) soit maîtrisé, mais on rappelle aussi que la transformation d'Abel trouve toute sa place dans cette leçon.

Remarque 1. *On se place dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les suites sont à valeurs dans K.*

1 Sommes partielles, restes et convergence des séries numériques

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2 (El Amrani p79)**.** *[Gourdon p200][Combes p39] Série, somme partielle, reste.*

La série de terme général u_n est la suite des $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Si la suite des S_n converge vers S, alors on dit que la série est convergente de somme S. Elle est divergente sinon.

(S_n) est la suite des sommes partielles de la série, et $R_n = S - S_n$ est la suite des restes.

Exemple 3 (El Amrani p80)**.** *[Gourdon p201][Combes p35] Série géométrique. Série arithmétique. Expression des sommes partielles et des restes (si possible).*

Exemple 4 (El Amrani p82)**.** *La série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge si, et seulement si, (u_n) converge : il y a équivalence entre suites et séries par ce procédé.*

Exemple 5 (Combes p36)**.** *[El Amrani p83] La série $\sum 1/(n(n+1))$ converge de somme 1.*

Proposition 6 (El Amrani p82)**.** *[Combes p39] Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \to 0$.*

Contre exemple 7 (El Amrani p82)**.** *$\ln(1 + 1/n)$ converge vers 0 mais la série diverge.*

Application 8. *$\sum \frac{1}{n}$ diverge. ($\frac{1}{n} \geq \ln(1 + \frac{1}{n})$).*

Définition 9 (El Amrani p82)**.** *Divergence grossière.*

Exemple 10 (El Amrani p82)**.** *Les séries de terme général $\sin(an)$ ne sont convergentes que si $a \in \pi\mathbb{Q}$ car sinon le terme général ne converge pas vers 0.*

Proposition 11 (Ouvrard)**.** *Lemme de Borel Cantelli.*

Proposition 12. *L'ensemble des suites (u_n) telles que la série $\sum u_n$ converge est un K-espace vectoriel. L'application $(u_n) \mapsto \sum u_n$ est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.*

Exemple 13. *Si $u_n = a_n + ib_n$, alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent.*

1.2 Critère de Cauchy et convergence absolue

Proposition 14 (El Amrani p83)**.** *Critère de Cauchy.*

Remarque 15. *Il s'agit de la complétude de K.*

Remarque 16. *On peut caractériser la complétude d'un espace vectoriel normé grâce aux séries numériques. $(E, ||.||)$ est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.*

Exemple 17 (El Amrani p84)**.** *La série harmonique diverge.*

Exemple 18 (Pommelet ?)**.** *[Gourdon p219] Si $\sigma \in S(\mathbb{N})$, alors $\sum \sigma(n)/n^2$ diverge.*

Définition 19 (El Amrani p84)**.** *Convergence absolue.*

Proposition 20. *L'ensemble des suites dont la série converge absolument est un K-espace vectoriel noté $l^1(K)$.*

Proposition 21 (El Amrani p84)**.** *La convergence absolue implique la convergence.*

Contre exemple 22 (El Amrani p84)**.** *$u_{2p} = -1/p$ et $u_{2p+1} = 1/p$.*

Proposition 23 (Combes p37)**.** *Pour une série absolument convergente, $|\sum u_n| \leq \sum |u_n|$, et de même pour les restes.*

Proposition 24. *Critère de condensation de Cauchy.*

Définition 25. *Séries semi-convergentes.*

Remarque 26 (Combes p38)**.** *Etude d'une série :*
1.$u_n \to 0$?
2.$\sum u_n$ converge absolument ?
3.Poursuivre l'étude.
D'où l'intérêt d'étudier les séries à termes positifs.

2 Séries à termes positifs ou nuls

Remarque 27. *Tout ce qui est présenté ici est vraie pour les suites négatives, il suffit de modifier quelques petits trucs.*

2.1 Comparaisons de séries

Remarque 28. *Les théorèmes de comparaison montrent qu'il est souvent utile de trouver des équivalents télescopique du terme général pour connaître le comportement de la série.*

Proposition 29 (El Amrani p85)**.** *Convergence si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.*

Exemple 30. *$S_n = \sum 1/k! \leq 3$. On note $e = \sum 1/n!$. On a $n!S_n < n!e < n!S_n + 1/n$, ce qui permet de montrer que e est irrationnel.*

Exemple 31 (Cours prépa)**.** *$\sum 1/p_n^{p_n}$ où p_n est le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n.*

Proposition 32 (El Amrani p86)**.** *Supposons $u_n \leq v_n$. On note σ_n et ρ_n la suite des sommes partielles et des restes de la série de terme général v_n, si cela existe. Alors si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge et $R_n \leq \rho_n$. Et si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge et $S_n \leq \sigma_n$.*

Exemple 33 (El Amrani p86)**.** *$\sum 1/n^2$ converge. $\sum 1/\sqrt{n}$ diverge.*

Proposition 34 (El Amrani p87)**.** *Règle d'équivalence.*

Application 35 (Pomm p186)**.** *$\sum u_n$ et $\sum \ln(1+u_n)$ sont de même nature.*

Application 36. *Étude de la vitesse de convergence du sinus itéré et de l'exponentielle itérée.*

Application 37 (El Amrani p88)**.** *[Combes p39] Séries de Riemann. Donner les équivalents des restes et des sommes partielles.*

Application 38. *Bertrand pour $\alpha \neq 1$.*

Application 39. *$\sum_{k=0}^{n} k^k \simeq n^n$.*

Remarque 40. *Le reste R_n d'une série de Riemann convergente vérifie $1/n^s = o(R_n)$. On dit que les séries de Riemann convergent lentement. Le reste d'une série géométrique de raison $0 < q < 1$ vérifie $R_n = O(sup_{k \geq n}(u_k))$. On dit que la série converge rapidement.*

Exemple 41 (Gourdon p202)**.** *Equivalent de la série harmonique.*

Contre exemple 42 (Hauchecorne p114)**.** *[Nourdin p136]*

Proposition 43 (El Amrani p90)**.** *Règle de domination. (Mettre tous les théorèmes dans un seul ?*

2.2 Comparaison à une intégrale

Proposition 44 (El Amrani p91 + p109)**.** *[Combes p44] Comparaison série-intégrale. Majoration du reste.*

Application 45 (El Amrani p92)**.** *$\sum 1/n \ln(n)^\alpha$.*

Exemple 46 (El Amrani p109)**.** *Pour calculer $\zeta(2)$ avec une marge d'erreur $\leq 10^{-3}$, il n'est pas utile de calculer S_1000, il suffit de calculer S_23 et de prendre pour valeur approchée la somme de S_n et de la moyenne arithmétique des encadrements intégraux de R_n.*

Proposition 47 (Pomm p159)**.** *Si au contraire f n'est pas intégrable, alors $S_n \sim \int_0^n f(x)dx$.*

Exemple 48. *$\sum_{k=3}^{n} 1/k \ln(k) \sim \ln(\ln(n))$.*

Proposition 49 (Gourdon p213)**.** *Exercice 6.*

Proposition 50 (Pomm p161)**.** *Equivalent de $\sum n^a$.*

2.3 Critères de convergence

Proposition 51 (Gourdon p205). *Si $u_{n+1}/u_n \leq v_{n+1}/v_n$ alors si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ cpnverge, si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.*

Corollaire 52 (Gourdon p205). $u_{n+1}/u_n = \frac{1}{1+a/n+o(1/n)}$.

Proposition 53 (Gourdon). *Raab Duhamel.*

Application 54. *Formule de Stirling.*

Proposition 55 (El Amrani p94, p107). *Règle de Cauchy et majoration du reste.*

Exemple 56 (El Amrani p94). $\sum(1-1/n)^{n^2}$.

Exemple 57 (El Amrani p108). $\sum n^{-n}$. *S_4 est une valeur approchée par défaut à moins de 35.10^{-5} près.*

Proposition 58 (El Amrani p95, p109). *Règle de d'Alembert et majoration du reste.*

Exemple 59 (El Amrani p95). $\sum a^n/n$.

Exemple 60 (El Amrani p108). *Calcul approché de e.*

Proposition 61 (Gourdon p212). $R_n \sim f(n)$.

Exemple 62 (Gourdon p212). $\sum \exp(-p^2) \sim \exp(-n^2)$

3 Séries semi-convergentes

3.1 Séries alternées

Définition 63 (El Amrani p97). *Série alternée.*

Théorème 64 (El Amrani p97). *Critère spécial des séries alternées.*

Exemple 65 (El Amrani p97). $\sum(-1)^{n-1}n^{-\alpha}$.

Exemple 66 (Gourdon p214).

Contre exemple 67 (El Amrani p98).

Application 68. *Majorer et minorer* $\exp(-x)$.

Exemple 69 (El Amrani p107). $\arctan(x) = \sum(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)$ *, donc* $|R_N| \leq x^{2N+1}/(2N+1)$ *. On a $\pi/4 = \arctan(1)$. Il faut 500 itérations pour une précision de 10^{-3} . $\pi/4 = 4\arctan(1/5) - arctan(1/239)$ (admis). Il faut 3 itérations pour une précision de 10^{-3}.*

3.2 Transformation d'Abel

Définition 70 (Gourdon p207). *Effectuer une transformation d'Abel c'est écrire : $\sum u_k v_k = S_n v_n + \sum S_k(v_k - v_{k-1})$ (c'est une IPP de séries).*

Proposition 71 (Gourdon p207). *[El Amrani p99] Règle d'Abel.*
Chacune des conditions suivantes est suffisante pour que $\sum u_n v_n$ converge :
a) (S_n) bornée et $v_n > 0$ et converge vers 0 en décroissant.
b) $\sum u_n$ converge, $v_n > 0$ et décroissante.
c) (S_n) bornée, $v_n \to 0$, et $\sum |v_n - v_{n+1}|$ convergente

Exemple 72 (Gourdon p207). *[El Amrani p99]*

4 Opérations sur les séries : produit de Cauchy

Définition 73 (El Amrani p101). *Série produit de Cauchy.*

Proposition 74 (Gourdon p208). *Produit de Cauchy de séries absolument convergentes.*

Contre exemple 75 (El Amrani p101). *Le produit de Cauchy de deux séries convergentes peut être divergent.*

Application 76 (El Amrani p103). $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$.

5 Sommations explicites

5.1 Evaluation de séries entières

Exemple 77 (Gourdon p253). $\sum(-1)^n/(n+1) = \ln(2)$
$\sum(-1)^n/(2n+1) = \pi/4$.

Proposition 78 (Bernis). *Théorème d'Abel angulaire.*

Proposition 79 (Bernis). *Théorème taubérien faible.*

Application 80 (Bernis). *Produit de Cauchy.*

5.2 Utilisation des séries de Fourier

Proposition 81 (Faraut). *Egalité de Parseval.*

Proposition 82. *Théorème de convergence normale.*

Proposition 83. *Théorème de Dirichlet.*

Application 84 (Gourdon). $\sum 1/n^2$, $\sum 1/n^4$.

Exemple 85. *avec 1 sur $[0,1]$ prolongée par imparité, on trouve*
avec t sur $[0,1]$ prolongée par imparité, on trouve
avec t^2 sur $[0,1]$ prolongée par imparité, on trouve